豆知識

位相差のある二つの正弦波の二乗の和

振幅が等しく，位相差が ϕ の二つの正弦波の二乗の和は，1 を中心とし，振幅が $\cos\phi$，周波数が 2 倍の正弦波となる．

$$\sin^2\left(\omega t-\frac{\phi}{2}\right)+\sin^2\left(\omega t+\frac{\phi}{2}\right)=1-\cos\phi\cos 2\omega t$$

もしくは $\omega\tau=\omega t-\dfrac{\phi}{2}$ として

$$\sin^2\omega\tau+\sin^2(\omega\tau+\phi)=1-\cos\phi\cos(2\omega\tau+\phi)$$

エネルギー方式による Q 値を求める際に，この関係式を使う．

証明

sin の半角公式より，

$$\begin{aligned}&\sin^2\left(\omega t-\frac{\phi}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[1-\cos(2\omega t-\phi)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[1-(\cos 2\omega t\cos\phi+\sin 2\omega t\sin\phi)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sin^2\left(\omega t+\frac{\phi}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[1-\cos(2\omega t+\phi)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[1-(\cos 2\omega t\cos\phi-\sin 2\omega t\sin\phi)\right]\end{aligned}$$

よって，

$$\sin^2\left(\omega t-\frac{\phi}{2}\right)+\sin^2\left(\omega t+\frac{\phi}{2}\right)=1-\cos\phi\cos 2\omega t$$

これを図示すると，**図 1** のようになる．同図からもわかるように，$\phi=\dfrac{\pi}{2}\pm n\pi\ (n=0,1,2,\cdots)$ において，$\cos 2\omega t$ の振幅がゼロ（$\cos\phi=0$）となる．これは，よく知られている次式に対応する．

$$\sin^2\omega\tau+\cos^2\omega\tau=1$$

$$\because\ \sin\left(\omega\tau+\frac{\pi}{2}\pm n\pi\right)=\cos(\omega\tau\pm n\pi)$$

$$=\begin{cases}\cos\omega\tau & (n=\text{偶数})\\ -\cos\omega\tau & (n=\text{奇数})\end{cases}$$

sin ではなく cos の場合についても同様であり，以下のようになる．

$$\cos^2\left(\omega t-\frac{\phi}{2}\right)\cos^2\left(\omega t+\frac{\phi}{2}\right)=1+\cos 2\phi\cos 2\omega t$$

もしくは $\omega\tau=\omega t-\dfrac{\phi}{2}$ として

$$\cos^2\omega\tau+\cos^2(\omega\tau+\phi)=1+\cos\phi\cos(2\omega\tau+\phi)$$

証明

cos の半角公式より，

$$\begin{aligned}&\cos^2\left(\omega t-\frac{\phi}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[1+\cos(2\omega t-\phi)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[1+(\cos 2\omega t\cos\phi+\sin 2\omega t\sin\phi)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos^2\left(\omega t+\frac{\phi}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[1+\cos(2\omega t+\phi)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[1+(\cos 2\omega t\cos\phi-\sin 2\omega t\sin\phi)\right]\end{aligned}$$

よって，

$$\cos^2\left(\omega t-\frac{\phi}{2}\right)+\cos^2\left(\omega t+\frac{\phi}{2}\right)=1+\cos\phi\cos 2\omega t$$

豆知識

正弦波の二乗の平均値

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left[A\sin(\omega t+\phi)\right]^2\ \mathrm{d}t=\frac{A^2}{2}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

証明

$x=\omega t+\phi$ とすると，$\mathrm{d}x=\omega\,\mathrm{d}t$ より，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\int_0^T\left[A\sin(\omega t+\phi)\right]^2\ \mathrm{d}t=\frac{A^2}{2\pi}\int_\phi^{\phi+2\pi}\sin^2 x\ \mathrm{d}x\\&=\frac{A^2}{4\pi}\int_\phi^{\phi+2\pi}(1-\cos 2x)\ \mathrm{d}x=\frac{A^2}{4\pi}\,2\pi=\frac{A^2}{2}\end{aligned}$$

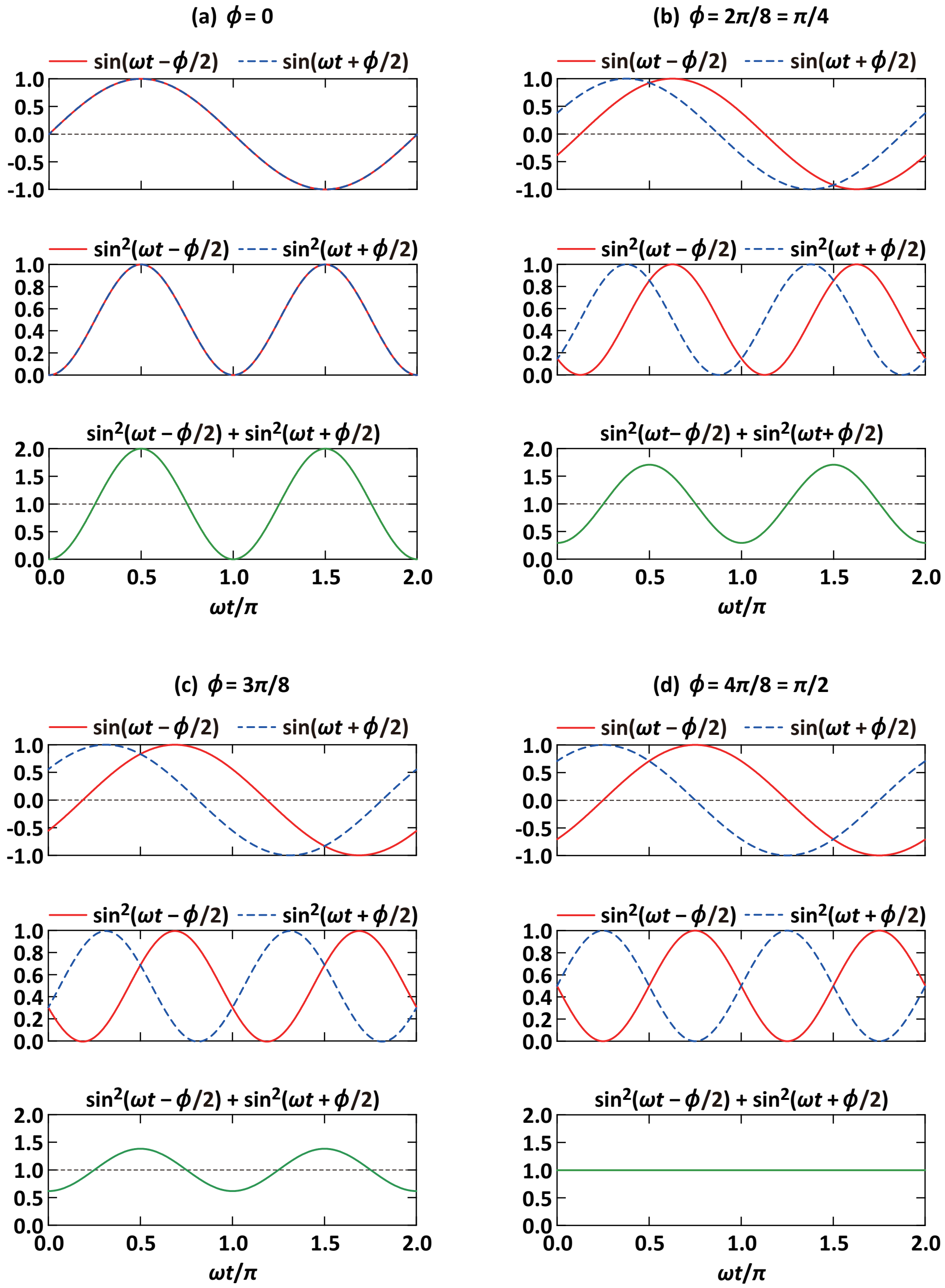

図 1 $\sin^2\left(\omega t-\dfrac{\phi}{2}\right)+\sin^2\left(\omega t+\dfrac{\phi}{2}\right)=1-\cos\phi\cos 2\omega t$ の波形．(a) $\phi=0$，(b) $\phi=\dfrac{\pi}{4}$，(c) $\phi=\dfrac{3\pi}{8}$，(d) $\phi=\dfrac{\pi}{2}$.